Chapitre 14

Développements limités

Sommaire

I DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1) Définition

Définition 14.1

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction et soit $a \in \mathrm{I}$ ou une borne réelle de I. Soit $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n en a (ou un $\mathrm{dl}_n(a)$) lorsqu'il existe un polynôme P de degré au plus n tel que :

$$f(x) = \mathrm{P}(x-a) + \underset{a}{o}\big((x-a)^n\big).$$

Si c'est le cas, alors le polynôme $\mathrm{P}(x-a)$ est appelé **partie régulière** *du $\mathrm{dl}_n(a)$.*

Remarque 14.1 –

- *On notera $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n et à coefficients complexes.*
- *On a $\mathrm{P}(x-a) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$, dans la pratique on* ***ne développe jamais*** *les termes $(x-a)^k$.*
- *Le reste du $\mathrm{dl}_n(a)$, c'est à dire $\underset{a}{o}((x-a)^n)$ peut aussi se mettre sous la forme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$.*
- *C'est le reste qui donne l'ordre du $\mathrm{dl}_n(a)$.*

☞**Exemples** :

- On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\sin(x) = x + \underset{0}{o}(x)$, c'est un $\mathrm{dl}_1(0)$ de $\sin(x)$, la partie régulière est x.
- Pour $x \neq 0$, $e^{-\frac{1}{x^2}} = \underset{0}{o}\big(x^2\big)$, c'est un $\mathrm{dl}_2(0)$, la partie régulière est nulle.

2) Formule de Taylor-Young

Définition 14.2 (polynôme de Taylor et reste)
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction, et soit $a \in \mathrm{I}$, si f possède des dérivées jusqu'à l'ordre n en a, alors on appelle polynôme de Taylor de f en a à l'ordre n, la fonction polynomiale notée $\mathrm{T}_{n,f,a}$ définie par :
$$\mathrm{T}_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$
*La différence $f(x) - \mathrm{T}_{n,f,a}(x)$ est notée $\mathrm{R}_{n,f,a}(x)$ est appelée **reste** de f en a à l'ordre n.*

Remarque 14.2 – *Si f est $n+1$ fois dérivable en a, alors $[\mathrm{T}_{n+1,f,a}(x)]' = \mathrm{T}_{n,f',a}(x)$.*

Théorème 14.1
Si f est définie et continue au voisinage de a et si $f(x) = \underset{a}{o}((x-a)^n)$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors au voisinage de a, on a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$.

Preuve : On écrit $f(t) = (t-a)^n \alpha(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \alpha(t) = 0$. On se donne $\varepsilon > 0$, dans un voisinage V de a on aura $|f(t)| \leqslant |t-a|^n \varepsilon$, pour $x > a$ dans V, on obtient $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon \int_a^x (t-a)^n\,\mathrm{d}t = \varepsilon \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} < (x-a)^{n+1}\varepsilon$. De même pour $x < a$ dans V, on vérifie que $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < |x-a|^{n+1}\varepsilon$. Ce qui montre que $\lim\limits_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^{n+1}} = 0$ et donc $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underset{a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$. □

Théorème 14.2 (formule de Taylor-Young)
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I et $a \in \mathrm{I}$, on a : $\mathrm{R}_{n,f,a}(x) = \underset{a}{o}((x-a)^n)$, c'est à dire : $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{a}{o}((x-a)^n)$.

Preuve : Par récurrence sur n : pour $n = 0$ $f(x) = f(a) + (f(x) - f(a))$, et $f(x) - f(a) = \underset{a}{o}(1)$, car f est continue en a. Supposons le théorème démontré au rang n, et supposons f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I, alors f' est de classe $\mathscr{C}^n$, l'hypothèse de récurrence s'applique à f' : $f'(t) = \mathrm{T}_{n,f',a}(t) + \underset{a}{o}((t-a)^n)$, en intégrant entre a et x, on obtient $f(x) - f(a) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \underset{a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$, en appliquant le théorème précédent pour l'intégration du o, un changement d'indice donne alors $f(x) = f(a) + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \underset{a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{a}{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$.
□

Remarque 14.3 – *Sous les mêmes hypothèses, on peut écrire qu'il existe une fonction ε telle que :*
$$f(x) = \mathrm{T}_{n,f,a}(x) + (x-a)^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Théorème 14.3
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ et soit $a \in \mathrm{I}$, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur l'intervalle I, alors f admet un $\mathrm{dl}_n(a)$ et sa partie régulière est $\mathrm{T}_{n,f,a}(x)$, c'est à dire son polynôme de Taylor en a à l'ordre n. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, alors f admet un dl en tout point de I et à n'importe quel ordre.

3) Développements usuels en 0

À retenir

- $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{0}{o}(x^n)$.
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + \underset{0}{o}(x^n)$.
- $\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{0}{o}\big(x^{2n+2}\big)$ (il s'agit du $\mathrm{dl}_{2n+2}(0)$).
- $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{0}{o}\big(x^{2n+1}\big)$ (il s'agit d'un $\mathrm{dl}_{2n+1}(0)$).
- $\mathrm{sh}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{0}{o}\big(x^{2n+2}\big)$ (il s'agit du $\mathrm{dl}_{2n+2}(0)$).
- $\mathrm{ch}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{0}{o}\big(x^{2n+1}\big)$ (il s'agit d'un $\mathrm{dl}_{2n+1}(0)$).

– $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underset{0}{o}(x^n)$, où $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$, formule des coefficients du binôme généralisée. En particulier : $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{0}{o}(x^n)$.

II PROPRIÉTÉS

1) Généralités

Théorème 14.4 (troncature)
Si f admet un $\mathrm{dl}_n(a)$ alors pour tout entier $p \in [\![0;n]\!]$, f admet un $\mathrm{dl}_p(a)$ dont la partie régulière s'obtient en tronquant la partie régulière du $\mathrm{dl}_n(a)$ au degré p.

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

★**Exercice 14.1** *Comment s'écrit le* $\mathrm{dl}_n(0)$ *d'un polynôme ?*

Théorème 14.5 (unicité du dl)
Si f admet un $\mathrm{dl}_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Preuve : Par récurrence sur n. Au rang 0 c'est évident avec un passage à la limite. Supposons l'unicité montrée au rang $n-1$. Si f a deux $\mathrm{dl}_n(a)$, alors par troncature elle a deux $\mathrm{dl}_{n-1}(a)$, ils sont donc égaux, ce qui donne après simplification $\alpha_n(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n) = \beta_n(x-a)^n + \underset{a}{o}((x-a)^n)$, en simplifiant par $(x-a)^n$ (pour $x \neq a$), et par passage à la limite en a, on obtient $\alpha_n = \beta_n$ et on a bien l'unicité au rang n. □

Changement de variable

On peut toujours se ramener en $a = 0$:

– On pose $u = x - a$, on a alors $f(x) = f(u+a) = g(u)$, d'où :

$$\begin{aligned} f \text{ admet un } \mathrm{dl}_n(a) &\iff \exists\, \mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}], f(x) = \mathrm{P}(x-a) + \underset{a}{o}\big((x-a)^n\big) \\ &\iff \exists\, \mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}], g(u) = \mathrm{P}(u) + \underset{0}{o}\big(u^n\big) \\ &\iff g \text{ admet un } \mathrm{dl}_n(0). \end{aligned}$$

– Si f est définie au voisinage de $\pm\infty$: on pose $u = \frac{1}{x}$, on a alors $f(x) = f(\frac{1}{u}) = g(u)$. Si g admet un $\mathrm{dl}_n(0)$; alors il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ tel que$g(u) = \mathrm{P}(u) + \underset{0}{o}(u^n)$, ce qui donne $f(x) = \mathrm{P}(\frac{1}{x}) + \underset{\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$, on dit alors que f admet un développement asymptotique en $\frac{1}{x}$ d'ordre n en $\pm\infty$, on remarquera que la partie régulière n'est pas un polynôme en x mais en $\frac{1}{x}$.

Théorème 14.6
- *f admet un $\mathrm{dl}_0(a)$ si et seulement si f admet une limite finie en a.*
- *f admet un $\mathrm{dl}_1(a)$ si et seulement si f admet un prolongement continu dérivable en a.*
- *Si f admet un $\mathrm{dl}_n(0)$, alors la partie régulière a la même parité que f.*

Preuve : Celle-ci est simple et laissée en exercice. □

Attention !
Une fonction peut avoir un $\mathrm{dl}_2(a)$ sans être deux fois dérivable en a.

★**Exercice 14.2** *Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^3\sin(\frac{1}{x})$ avec $f(0) = 0$, admet un $\mathrm{dl}_2(0)$ (dont la partie régulière est nulle), mais f' n'est pas dérivable en 0, donc f n'est pas deux fois dérivable en 0 (et donc f' n'a pas de DL en 0).*

2) Règles de calculs

Théorème 14.7

Si f, g admettent un $\mathrm{dl}_n(0)$, $f(x) = \mathrm{P}(x) + \underset{0}{o}(x^n)$ et $g(x) = \mathrm{Q}(x) + \underset{0}{o}(x^n)$, avec $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

- *DL d'une combinaison linéaire : $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \lambda f + g$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ dont la partie régulière en $\lambda \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$.*
- *DL d'un produit : $f(x) \times g(x)$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $[\mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)]_n$ (polynôme $\mathrm{P}(x) \times \mathrm{Q}(x)$ tronqué au degré n).*
- *DL d'une composée : si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, alors $f(g(x))$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $[\mathrm{P}(\mathrm{Q}(x))]_n$.*
- *Intégration des DL : si f' admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ dont la partie régulière est $\mathrm{P}(x)$, alors f admet un $\mathrm{dl}_{n+1}(0)$ dont la partie régulière est : $f(0) + \int_0^x \mathrm{P}(t)\, dt$.*
- *Inversion d'un DL : si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a \neq 0$, alors $\frac{1}{f(x)}$ admet un $\mathrm{dl}_n(0)$ qui s'obtient en composant le $\mathrm{dl}_n(0)$ de $\frac{1}{1+u}$ avec celui de $\frac{f(x)-a}{a}$, et en multipliant par $\frac{1}{a}$.*

Preuve : Donnons un exemple pour la composition avec $n = 2$: $f(x) = a + bx + cx^2 + x^2 u(x)$ et $g(x) = \alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x)$, avec u et v de limite nulle en 0, on en déduit en composant : $f(g(x)) = a + b(\alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x)) + c(\alpha x + \beta x^2 + v(x))^2 + (\alpha x + \beta x^2 + x^2 v(x))^2 u(g(x))$, ce qui donne après avoir développer et regrouper les puissances de x strictement supérieures à 2 : $f(g(x)) = a + b\alpha x + [b\beta + c\alpha^2]x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$, on peut vérifier que la partie régulière est la troncature au degré 2 de $\mathrm{P}(\mathrm{Q}(x))$.

Pour l'intégration cela découle de la propriété déjà établie : $\int_0^x \underset{0}{o}(t^n)\,\mathrm{d}t = \underset{0}{o}(x^{n+1})$.

Pour $\frac{1}{f(x)}$: comme $a \neq 0$, on a $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{f(x)-a}{a}}$, et $\frac{f(x)-a}{a} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc la règle de composition s'applique. □

Attention !

Il n'y a pas de propriété de dérivation de DL. Par exemple, on vérifiera que la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ avec $f(0) = 0$, admet un $\mathrm{dl}_1(0)$ (dont la partie régulière est nulle), mais f' n'a pas de limite fine en 0, donc f' n'a pas de $\mathrm{dl}_0(0)$.

3) Développements usuels (compléments)

Pour $x \neq 1$, on a $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, on en déduit :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

En substituant $-x$ à x, on obtient :

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

En intégrant ce dernier développement entre 0 et x, on obtient :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \underset{0}{o}(x^{n+1}).$$

En substituant x^2 à x dans l'avant dernier, on obtient :

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \underset{0}{o}(x^{2n+1}) \text{ c'est un } \mathrm{dl}_{2n+1}(0).$$

En intégrant ce dernier développement entre 0 et x, on obtient :

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \underset{0}{o}(x^{2n+2}).$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

Or $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1\times3\times\ldots\times(2k-1)}{k!2^k} = (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$, on a finalement :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k + \underset{0}{o}(x^n).$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} + \underset{0}{o}(x^{2n+1}).$$

En intégrant entre 0 et x, obtient :

$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{0}{o}(x^{2n+2}).$$

et :

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{0}{o}(x^{2n+2}).$$

☞**Exemples** :

- Calculer un $dl_3(0)$ de $\exp(\sin(x))$.
  On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}(x^3)$ et $\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{0}{o}(u^3)$. Comme $\lim_{x\to0}\sin(x) = 0$, on peut appliquer le théorème de composition, et composer les parties régulières jusqu'à l'ordre 3, ce qui donne $\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{0}{o}(x^3)$.
- Calculer un $dl_4(0)$ de $(1+\sin(x))^x$.
  L'expression est égale à $\exp[x\ln(1+\sin(x))]$. Un $dl_3(0)$ de $\sin(x)$ est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}(x^3)$, et $\ln(1+u) = u - \frac{u}{2} + \frac{u^3}{3} + \underset{0}{o}(u^3)$, on obtient par composition, $\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{0}{o}(x^3)$ et donc $x\ln(1+\sin(x)) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \underset{0}{o}(x^4)$. On a également $\exp(v) = 1 + v + \frac{v^2}{2} + \underset{0}{o}(v^2)$, d'où par composition : $\exp[x\ln(1+\sin(x))] = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + 2\frac{x^4}{3} + \underset{0}{o}(x^4)$.
- Calculer un $dl_5(0)$ de $\tan(x)$:
  On a $\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}$. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{0}{o}(x^5)$. D'autre part $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u}$ avec $u = \cos(x) - 1$, comme $u \to 0$, on pourra donc composer, $\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{0}{o}(x^5)$ et $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \underset{0}{o}(u^2)$, ce qui donne : $\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + 5\frac{x^4}{24} + \underset{0}{o}(x^5)$. On effectue ensuite le produit avec le dl de $\sin(x)$, ce qui donne $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{0}{o}(x^5)$.
  Autre méthode : on a $\tan(x) = 0 + \underset{0}{o}(1)$, d'où $1 + \tan(x)^2 = 1 + \underset{0}{o}(1)$, en intégrant, on obtient $\tan(x) = x + \underset{0}{o}(x) = x \times (1 + \underset{0}{o}(1))$. Puis on recommence : $1 + \tan(x)^2 = x^2 \times (1 + \underset{0}{o}(1))^2 = x^2 \times (1 + \underset{0}{o}(1)) = 1 + x^2 + \underset{0}{o}(x^2)$ et donc $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \underset{0}{o}(x^3) = x \times (1 + \frac{x^2}{3} + \underset{0}{o}(x^2))$, mais alors $1 + \tan(x)^2 = x^2 \times (1 + \frac{x^2}{3} + \underset{0}{o}(x^2))^2 = x^2 \times (1 + \frac{2x^2}{3} + \underset{0}{o}(x^2)) = 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \underset{0}{o}(x^4)$, et donc $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \underset{0}{o}(x^5)$... etc

III APPLICATIONS

1) Recherche d'une limite

☞**Exemple** : Soit $f(x) = \frac{x^2-1-2x\ln(x)}{x(x-1)\ln(x)}$, calculer $\lim_{x\to1} f(x)$.

Il s'agit bien d'une forme indéterminée, on ramène le problème en 0 en posant $u = x - 1$, ce qui donne $f(x) = \frac{u^2+2u-2(1-u)\ln(1+u)}{u(1+u)\ln(1+u)} \underset{0}{\sim} \frac{u^2+2u-2(1+u)\ln(1+u)}{u^2}$. On cherche alors un $dl_2(0)$ du numérateur, ce qui donne $\underset{0}{o}(u^2)$, on a donc $f(x) = f(1+u) \underset{0}{\sim} \underset{0}{o}(1)$ et donc la limite cherchée est nulle.

★**Exercice** 14.3 *Calculer* $\lim_{x\to+\infty} x^2\ln(\frac{x}{1+x}) + x - 1$.

2) Étude locale d'une fonction au voisinage d'un point

Si f a un $\mathrm{dl}_2(a)$, $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \underset{a}{o}\big((x-a)^2\big)$, alors on voit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a_0$, on peut donc prolonger f par continuité en a, en posant $f(a) = a_0$ (si ce n'est pas déjà fait !). Le taux d'accroissement en a s'écrit : $\frac{f(x)-a_0}{x-a} = a_1 + \underset{a}{o}(1)$, donc ce prolongement est dérivable en a et $f'(a) = a_1$. L'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est $y = a_1(x-a) + a_0$, et l'étude de la position courbe-tangente se fait en étudiant le signe de $f(x) - [a_0 + a_1(x-a)] = (x-a)^2[a_2 + \underset{a}{o}(1)]$, d'où la discussion :

- si $a_2 > 0$: alors au voisinage de a on a $[a_2 + \underset{a}{o}(1)] > 0$ et donc $f(x) > a_0 + a_1(x-a)$, *i.e.* la courbe est au-dessus de sa tangente **au voisinage** de a.
- si $a_2 < 0$: c'est la situation inverse.
- si $a_2 = 0$: on ne peut rien dire, il faut aller plus loin dans le développement limité. Dans la pratique on s'arrête au premier terme non nul de degré supérieur ou égal à 2.

★**Exercice 14.4** *Soit* $f(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2-1}$, *effecter une étude locale en* $a = 1$.

3) Étude locale au voisinage de l'infini

Si f est définie au voisinage de ∞ et admet une limite infinie, alors on peut étudier la branche infinie de f de la manière suivante : on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, on se ramène en 0 en posant $u = 1/x$, ce qui donne $g(x) = g(1/u) = uf(1/u)$, et on cherche un $\mathrm{dl}_2(0)$ de cette expression : $uf(1/u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \underset{0}{o}\big(u^2\big)$, ce qui donne en revenant à x, $f(x) = a_0 x + a_1 + a_2\frac{1}{x} + \underset{\infty}{o}\big(\frac{1}{x}\big)$, d'où $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - [a_0 x + a_1] = 0$, donc la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à C_f au voisinage de ∞. Pour la position courbe-asymptote, on étudie la différence : $f(x) - [a_0 x + a_1] = \frac{1}{x}[a_2 + \underset{\infty}{o}(1)]$, l'étude du signe se fait comme dans le paragraphe précédent si $a_2 \neq 0$. Lorsque $a_2 = 0$ il faut aller plus loin dans le développement pour avoir le signe.

Remarque 14.4 – *Dans la pratique, on n'est pas obligé de passer par la fonction* $\frac{f(x)}{x}$, *en travaillant directement sur* $f(x)$.

★**Exercice 14.5** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}$ *au voisinage de* $+\infty$.

4) Recherche d'un équivalent

Théorème 14.8

Si f *admet un* $\mathrm{dl}_n(a)$, *alors* $f(x)$ *est équivalente en* a *au terme* ***non nul de plus bas degré*** *de la partie régulière, s'il existe.*

Preuve : Soit $a_p(x-a)^p$ le premier terme non nul, on a alors $f(x) = a_p(x-a)^p + \underset{a}{o}((x-a)^p) = (x-a)^p[1 + \underset{a}{o}(1)]$, ce qui prouve l'équivalence annoncée. □

Remarque 14.5 –

- *En se ramenant en* 0, *on peut également trouver un équivalent d'une fonction en* $\pm\infty$.
- *Avec ce théorème, on retrouve tous les équivalents dits « classiques ».*

★**Exercice 14.6** *Équivalent en* 0 *de la fonction* $f(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x}{3-2x^2}$.

IV SOLUTION DES EXERCICES

Solution 14.1 *Il suffit de le tronquer au degré* n, *la somme des termes suivants est un* $\underset{0}{o}(x^n)$.

Solution 14.2 *On a* $f(x) = \underset{0}{o}\big(x^2\big)$ *qui un* $\mathrm{dl}_2(0)$ *de* f, *on en déduit que* f *est dérivable en* 0 *avec* $f'(0) = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on a* $f'(x) = 2x^2\sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})$, *d'où* $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$, *or cette fonction n'a pas de limite en* 0 *car si on prend* $u_n = \frac{1}{n\pi}$, *alors* $\cos(\frac{1}{u_n}) = (-1)^n$ *n'a pas de limite, alors que* $2u_n\sin(\frac{1}{u_n}) \to 0$. *Donc* f *n'est pas deux fois dérivable en* 0.

Solution 14.3 *Il s'agit bien d'une forme indéterminée, on se ramène en* 0 *en posant* $u = 1/x$*, on a alors* $f(x) = f(\frac{1}{u}) = \frac{-1}{u^2}\ln(1+u) + \frac{1}{u} - 1$*, ce qui donne* $f(\frac{1}{u}) = \frac{-1}{2} + \underset{0}{o}(1)$*, et donc la limite cherchée est* $\frac{-1}{2}$.

Solution 14.4 *On pose* $u = x-1$ *d'où* $f(x) = f(1+u) = \frac{\ln(1+u)}{u}(1+u)\frac{1}{2[1+u/2]}$*, le calcul donne* $f(x) = f(1+u) = \frac{1}{2} - \frac{u^2}{12} + \underset{0}{o}\big(u^2\big)$*. On en déduit que* f *se prolonge par continuité en* 1 *en posant* $f(1) = \frac{1}{2}$*, ce prolongement est dérivable en* 1 *et* $f'(1) = 0$*, de plus, au voisinage de* 1*, la courbe est en-dessous de la tangente. On a donc un maximum local en* 1.

Solution 14.5 *On voit que* f *est définie au voisinage de* $+\infty$ *et que* $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$*, il y a donc une branche infinie de direction asymptotique* $y = x$*. Posons* $u = \frac{1}{x}$*, on a alors* $f(x) = f(\frac{1}{u}) = \frac{1}{u}(1-3u)^{-1/3} = \frac{1}{u}(1+u+2u^2+\underset{0}{o}\big(u^2\big))$*, d'où* $f(x) = x+1+\frac{2}{x}+\underset{+\infty}{o}\big(\frac{1}{x}\big)$*. Donc la droite d'équation* $y = x+1$ *est asymptote à la courbe de* f *en* $+\infty$*, et au voisinage de* $+\infty$ *la courbe de* f *est au-dessus.*

Solution 14.6 *On a* $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{3x^4}{8}+\underset{0}{o}\big(x^5\big)$*, en intégrant on obtient* $\arcsin(x) = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\underset{0}{o}\big(x^5\big)$*, en effectuant le produit, il vient que :* $\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = x+\frac{2x^3}{3}+\frac{8x^5}{15}+\underset{0}{o}\big(x^5\big)$*. D'un autre côté, on a* $\frac{3x}{3-2x^2} = x\frac{1}{1-2x^2/3} = x[1+\frac{2x^2}{3}+\frac{4x^4}{9}+\underset{0}{o}\big(x^4\big)] = x+\frac{2x^3}{3}+\frac{4x^5}{9}+\underset{0}{o}\big(x^5\big)$*. Finalement, on a* $f(x) = \frac{4x^5}{45}+\underset{0}{o}\big(x^5\big)$*, et donc* $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x^5}{45}$.